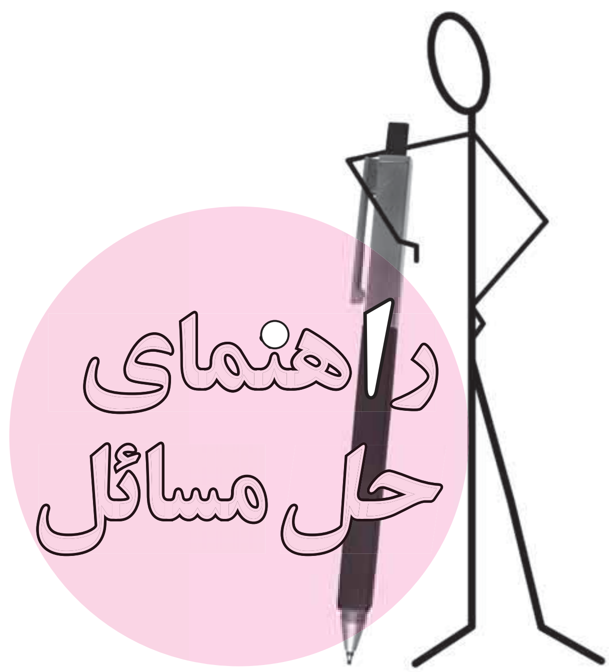


راهنمایی حل مسائل ریاضی دهم

۱.

I) $(A\cap B)=[-۲,۱۰]$

II) $(A\cup C)=R$

III) $A'=(-\infty,-۲),(A'\cap C)=(-\infty,-۲)\Rightarrow(A'\cap C)'=[-۲,+\infty)$

IV) $C'=[۱۰,+\infty)\Rightarrow A\cup C'=[-۲,+\infty)$

V) $(A-B)=(۱۰,+\infty)$

۲. خیر، می‌دانیم $A\subseteq(A-B)$ و A متناهی است. پس قطعاً $(A-B)$ متناهی است، اما لزوماً تهی نیست. به عنوان مثال:

$A=\{۱,۲,۳,۴\},\ B=\{۳,۴,۵,...\}$

$\Rightarrow A-B=\{۱,۲\}\neq\varnothing$

۳.

$A=\{۲,۳,۴,...\}$

$B=\{۶,۷,۸,۹,...\}$

$A-B=\{۲,۳,۴,۵\},\ A\cap B=\{۶,۷,۸,...\}$

۴.

$$d=-۳, t_۵=۸\Rightarrow ۸=a+(۵-۱)\times(-۳)$$
$$\Rightarrow ۸=a-۱۲\Rightarrow a=۲۰\Rightarrow t_{۱۲}=a+۱۱\times d$$
$$\Rightarrow t_{۱۲}=۲۰+۱۱\times(-۳)\Rightarrow t_{۱۲}=-۱۳$$

۵.

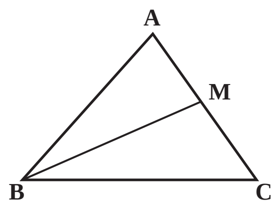
$$t_n=a\times r^{n-۱}$$
$$\begin{cases}t_۷=a\times r^۶\\ t_۳=a\times r^۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۸۰=a\times r^۶\\ ۵=a\times r^۲\end{cases}\Rightarrow\frac{۸۰}{۵}=\frac{\cancel{a}\times r^۶}{\cancel{a}\times r^۲}$$
$$\Rightarrow r^۴=۱۶\Rightarrow r=\pm۲\Rightarrow t_{۱۱}=a\times r^{۱۰}\Rightarrow t_{۱۱}=a\times۲^{۱۰}$$

برای یافتن a از جملهٔ سوم استفاده می‌کنیم:

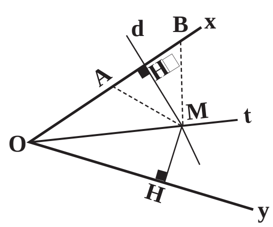
$$۵=a\times۲^۲\Rightarrow a=\frac{۵}{۴}\Rightarrow t_{۱۱}=\frac{۵}{۴}\times۲^{۱۰}=۵\times۲^۸=۱۲۸۰$$

پاسخ مسائل هندسهٔ پایهٔ دهم

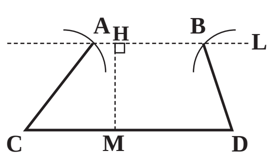
۱. در مثلث ABC که AB=۸، AC=۶ و میانهٔ BM=۵، $AM=\frac{AC}{۲}=۳$. در نتیجه، مثلث ABM را با داشتن طول‌های سه ضلع آن می‌توان رسم کرد و از آنجا مثلث ABC را بنا کرد. پس ابتدا پاره‌خط BM به طول ۵ را رسم می‌کنیم و سپس به مرکز B و به شعاع ۸ و به مرکز M و به شعاع ۳ کمان‌هایی رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن‌ها را A می‌نامیم. سپس AM را از طرف M به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ C امتداد می‌دهیم و C را به B وصل می‌کنیم.



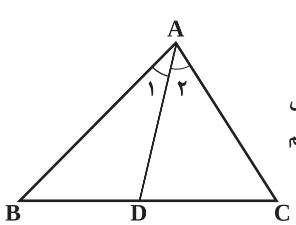
۲. نیم‌ساز زاویهٔ xoy (ot) را رسم می‌کنیم. همهٔ نقاط روی ot از ox و oy به یک فاصله‌اند. سپس عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم (d) همهٔ نقاط روی d از A و B به یک فاصله‌اند. پس محل برخورد d و ot، یعنی نقطهٔ M، جایی است که از A و B به یک فاصله و از ox و oy نیز به یک فاصله است: MH=MH′ و MA=MB.



۳. ابتدا پاره‌خط CD به طول ۶ واحد را رسم می‌کنیم. سپس از یک نقطهٔ دلخواه روی آن عمودی خارج می‌کنیم و به اندازهٔ ۳ واحد روی آن جدا می‌کنیم (MH=۳).
در ادامه در نقطهٔ H عمودی بر MH رسم می‌کنیم که خطی موازی CD است (خط L). بعد به مرکز C و به شعاع ۴ و به مرکز D و به شعاع ۳/۵ کمان‌هایی می‌زنیم. محل برخورد این کمان‌ها با L نقاط A و B است.



۴.

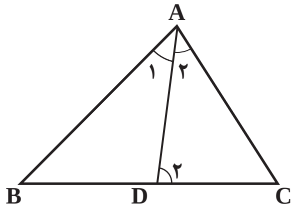


فرض: $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$ و BD≠CD

حکم: AB≠AC

اثبات: فرض کنیم AB≠AC نباشد، پس: AB=AC. یعنی ABC مثلثی متساوی‌الساقین است و در نتیجه طبق خواص این مثلث، نیم‌ساز زاویهٔ رأس در آن، میانه (و ارتفاع) نیز هست. و در نتیجه: BD=CD. اما این خلاف فرض است. پس باید AB≠AC باشد (برهان خلف).

۵.

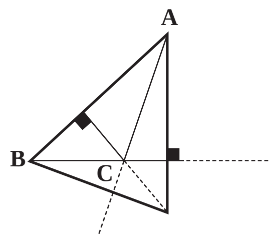


فرض: $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$

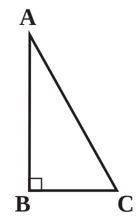
حکم: $AC>AD$

اثبــات: زاویــهٔ $D_۲$ نســبت به مثلث ABD خارجی اســت. پــس داریم: $\hat{D}_۲ = \hat{A}_۱ + \hat{B} > \hat{A}_۱$ و چون: $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$، پــس: $\hat{D}_۲ > \hat{A}_۲$. لذا در مثلث ADC زاویهٔ روبه‌رو به AC از زاویهٔ روبه‌رو به DC بزرگ‌تر است و در نتیجه: AC>CD.

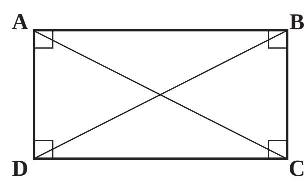
۶. الــف) نادرســت. مثــال نقض: مثلثی با یک زاویهٔ منفرجه.



ب) نادرســت. مثــال نقــض: در مثلــث قائم‌الزاویــهٔ ABC ($\hat{B}=۹۰^\circ$)، ارتفــاع AB از هر دو ضلــع مجاورش (AB و AC) کوچک‌تر نیست.



ج) درســت. در متوازی‌الاضلاع ABCD قطرهــای AC و BD برابرند. با توجه بــه ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع داریم:

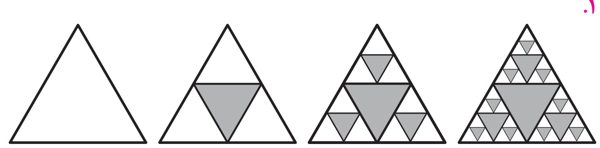


$$\left.\begin{matrix} AB = AB \\ BC = AD \\ AC = BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \overset{\text{ض‌ض‌ض}}{\cong} \Delta ABD \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}, \hat{A} + \hat{B} = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ \Rightarrow \text{ABCD مستطیل است.}$$

هندسهٔ ۲ (سوم دبیرستان)

۱.



مرحلهٔ ۰   مرحلهٔ ۱   مرحلهٔ ۲   مرحلهٔ ۳

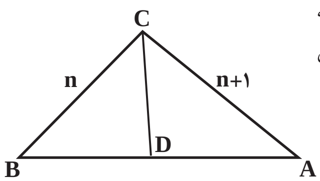
حدس:

مرحله	۰	۱	۲	۳	...	n
تعداد مثلث‌های سیاه	۰	۱	۴	۱۳	...	$\frac{۳^n-۱}{۲}$

۲. کافی اســت نشان دهیم که a=n، b=n+۱ و c=n+۲ می‌توانند با فرض n>۱ اضلاع مثلثی باشــند و این کار را به کمک نامســاوی مثلثی انجام می‌دهیم:

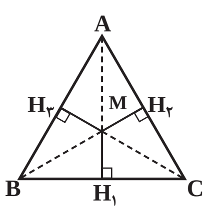
$$a+b>c: ۲n+۱>n+۲ \Leftrightarrow n>۱$$
$$a+c>b: ۲n+۲>n+۱ \Leftrightarrow n>-۱$$
$$b+c>a: ۲n+۳>n \Leftrightarrow n>-۳$$

و بــرای قســمت دوم با توجه به قضیهٔ نیم‌سازهای زوایای داخلی می‌نویسیم:



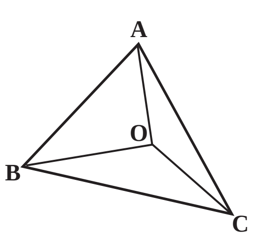
$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} \Rightarrow \frac{n+۱}{n} = \frac{DA}{DB} \Rightarrow \frac{n+۱+n}{n} = \frac{AB}{DB}$$
$$\Rightarrow \frac{n+۲}{DB} = \frac{۲n+۱}{n} \Rightarrow DB = \frac{n^۲+۲n}{۲n+۱},$$
$$DA = n+۲-\frac{n^۲+۲n}{۲n+۱} = \frac{n^۲+۳n+۲}{۲n+۱}$$
$$\Rightarrow DA - DB = \frac{n+۲}{۲n+۱} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۴n+۲ = ۳n+۶$$
$$\Rightarrow n = ۴ \Rightarrow BC = ۴, AC = ۵, BA = ۶$$

۳.



$$MH_۱ = MH_۲ = MH_۳ = x$$
$$AB = AC = BC = a = ۶$$
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}MH_۱.BC + \frac{۱}{۲}MH_۲.AC + \frac{۱}{۲}MH_۳.AB$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{۳}{۲}ax \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a = \sqrt{۳}$$

۴. از نامساوی مثلثی استفاده می‌کنیم:

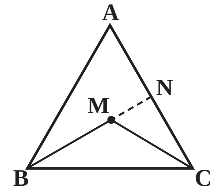


$$\left.\begin{matrix} OA+OB>AB \\ OA+OC>AC \\ OB+OC>BC \end{matrix}\right\}$$
$$\overset{+}{\Rightarrow} ۲(OA+OB+OC) > AB+AC+BC$$
$$\Rightarrow OA+OB+OC > \frac{AB+AC+BC}{۲}$$

برای اثبــات اینکه OA+OB+OC<AB+AC+BC از یک نابرابری دیگر به صورت زیر کمک می‌گیریم:

برای هر نقطهٔ دلخواه M درون مثلث ABC داریم:

و $AB+AC > MB + MC$
برای اثبات، مطابق شکل MB را امتداد می‌دهیم تا AC را در نقطهٔ N قطع کند و به کمک نامساوی مثلثی می‌نویسیم:

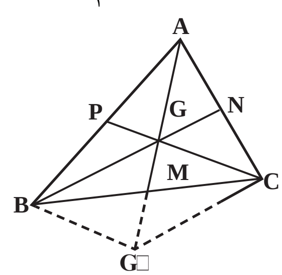


$$\left.\begin{array}{l} MN+NC>MC \\ BA+AN>BM+MN \end{array}\right\}$$
$$\overset{+}{\Rightarrow} MN+NC+BA+AN>MC+BM+MN$$
$$\Rightarrow AB+AC>MC+MB$$

حال به کمک این قضیه می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} OB+OC<AB+AC \\ OA+OC<AB+BC \\ OB+OA<AC+BC \end{array}\right\}$$
$$\overset{+}{\Rightarrow} ۲(OA+OB+OC)<۲(AB+AC+BC)$$
$$\Rightarrow OA+OB+OC<AB+AC+BC$$

۵. مسئله را حل شده فرض می‌کنیم. GM را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ G´ امتداد می‌دهیم. چون G´M=GM و MB=MC، پس GCG´B متوازی‌الاضلاع است. بنابراین: $CG' = GB = \frac{۲}{۳}BN$، $CG = \frac{۲}{۳}CP$ و $GG' = ۲GM = \frac{۲}{۳}AM$. اکنون با معلوم بودن طول‌های CG´، CG، و GG´ (برحسب طول‌های میانه‌های مثلث) می‌توان ابتدا مثلث CGG´ و از آنجا مثلث ABC را رسم کرد.

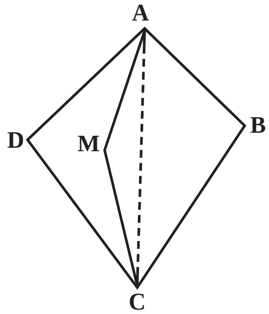


طریقهٔ رسم: پاره‌خط CG´ را مساوی $\frac{۲}{۳}m_b$ (دو سوم طول میانهٔ وارد بر AC=b) رسم می‌کنیم. به مرکز G´ و به شعاع $\frac{۲}{۳}m_a$ و به مرکز C به شعاع $\frac{۲}{۳}m_c$ کمان می‌زنیم و محل برخورد دو کمان را G می‌نامیم تا مثلث CGG´ رسم شود. سپس CG را از طرف G به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}m_c$ امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ P برسیم، و G´G را به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}m_a$ امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ A برسیم، و A را به P وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا امتداد میانهٔ CM از مثلث CGG´ را در نقطهٔ B قطع کند و مثلث ABC رسم می‌شود. شرط وجود جواب آن است که مثلث CGG´ رسم شود؛ یعنی: $\frac{۲}{۳}m_a+\frac{۲}{۳}m_b>\frac{۲}{۳}m_c$ و یا: $m_a+m_b>m_c$. به همین ترتیب: $m_a+m_c>m_b$ و $m_b+m_c>m_a$.

۶.

$$S_{MABC}=S_{MADC}$$
$$\Rightarrow S_{ABC}+S_{MAC}=S_{ADC}-S_{MAC}$$
$$\Rightarrow S_{MAC}=\frac{S_{ADC}-S_{ABC}}{۲}$$

بنابراین S_{MAC} مقداری ثابت است و چون AC هم مقداری ثابت است، پس مکان هندسی M خط راستی موازی AC است.



پاسخ‌نامهٔ حسابان

۱.
$$x^{۱۰}=(x^{۱۰}-۱)+۱=[(x^{۵})^{۲}-۱]+۱=(x^{۵}-۱)(x^{۵}+۱)+۱$$
$$=(x-۱)(x^{۴}+x^{۳}+x^{۲}+x+۱)(x^{۵}+۱)+۱$$
$$\Rightarrow x^{۱۰}=(x^{۴}+x^{۳}+x^{۲}+x+۱)Q(x)+۱\Rightarrow \boxed{R(x)=۱}$$

۲. چون تقسیم P(x) بر x+۱ باقی‌ماندهٔ ۲ دارد، پس: P(x)=(x+۱)Q(x)+۲ و: P(x)−۲=(x+۱)Q(x). یعنی P(x)−۲ مضرب (x+۱) است. به‌طور مشابه P(x)−۲ باید مضرب (x+۲)، (x−۱) و (x−۲) باشد، پس P(x)−۲ مضرب تمام آن‌هاست. یعنی:

P(x)−۲=(x+۱)(x−۱)(x+۲)(x−۲)Q(x)

پس: P(x)−۲=(x²−۱)(x²−۴)Q(x) و درنتیجه: P(x)−۲=(x⁴−۵x²+۴)Q(x).

بنابراین: P(x)=(x⁴−۵x²+۴)Q(x)+۲.

چون P(x) از درجهٔ ۴ است، پس: Q(x)=k. یعنی مستقل از x است و k∈R. بنابراین: P(x)=k(x⁴−۵x²+۴)+۲. اکنون چون P(x) بر x−۳ بخش‌پذیر است، داریم: P(۳)=۰. بنابراین:

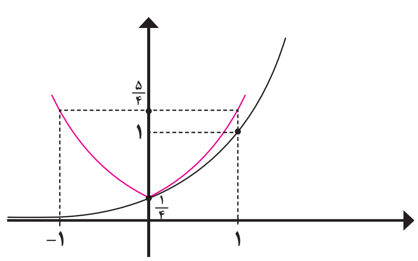
$$P(۳)=۰\Rightarrow k(۸۱-۴۵+۴)+۲=۰$$
$$\Rightarrow ۴۰k+۲=۰\Rightarrow k=-\frac{۱}{۲۰}$$

پس: $P(x)=-\frac{۱}{۲۰}(x^{۴}-۵x^{۲}+۴)+۲$.

۳. ابتدا معادلهٔ داده شده را ساده می‌کنیم.

$$۲^{۲x+۱}=۸x^{۲}+۲\Rightarrow ۲\times(۲^{۲})^{x}=۲(۴x^{۲}+۱)$$
$$\Rightarrow ۴^{x}=۴x^{۲}+۱\overset{\div ۴}{\Rightarrow}۴^{x-۱}=x^{۲}+\frac{۱}{۴}$$

اکنون نمودار هر کدام از توابع $y=۴^{x-۱}$ و $y=x^{۲}+\frac{۱}{۴}$ را رسم می‌کنیم.



به وضوح x=۰ یک ریشه است، ولی چون رشد تابع نمایی 4^{x-1} نسبت به تابع درجهٔ دوم $x^2+\frac{1}{4}$ خیلی بیشتر است، برای xهای بزرگ، این دو نمودار دوباره یکدیگر را قطع می‌کنند. پس معادلهٔ اولیه دو ریشه خواهد داشت. با توجه به جدول زیر، ریشهٔ دوم عددی بین ۲ و ۳ خواهد بود.

x	۱	۲	۳
4^{x-1}	۱	۴	۱۶
$x^2+\frac{1}{4}$	$1+\frac{1}{4}$	$4+\frac{1}{4}$	$9+\frac{1}{4}$

۴. نابرابری مثلثی به‌صورت $|a\pm b|\le|a|+|b|$ است و تساوی هنگامی رخ می‌دهد که a و b هم‌علامت باشند. در این سؤال a=x-۱، b=۴-۲x و a-b=۳x-۵. پس تساوی $|a-b|=|a|+|b|$ هنگامی رخ می‌دهد که a و b مثبت و یا هر دو منفی باشند.

$$\begin{cases} a<0 \Rightarrow x-1<0 \Rightarrow x<1 \\ b<0 \Rightarrow 4-2x<0 \Rightarrow x>2 \end{cases} \xRightarrow{\text{اشتراک}} \varnothing$$

$$\begin{cases} a>0 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow x>1 \\ b>0 \Rightarrow 4-2x>0 \Rightarrow x<2 \end{cases} \xRightarrow{\text{اشتراک}} 1<x<2$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های این معادله (۱،۲) است.

۵. ابتدا قرار می‌دهیم t=x+۱:

$$x^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=\frac{5}{4} \Rightarrow (t-1)^2+\left(\frac{t-1}{t}\right)^2=\frac{5}{4}$$
$$\Rightarrow t^2-2t+1+\left(1-\frac{1}{t}\right)^2=\frac{5}{4}$$
$$\Rightarrow t^2-2t+1+1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\frac{5}{4}$$
$$\Rightarrow \left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)-2\left(t+\frac{1}{t}\right)+2=\frac{5}{4}$$

اکنون اگر $s=t+\frac{1}{t}$، پس:

$$s^2=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2=t^2+\frac{1}{t^2}+2.$$

بنابراین: $t^2+\frac{1}{t^2}=s^2-2$. با جای‌گذاری در معادلهٔ بالا داریم:

$$(s^2-2)-2s+2=\frac{5}{4} \Rightarrow s^2-2s-\frac{5}{4}=0$$
$$\Rightarrow 4s^2-8s-5=0 \Rightarrow (2s-5)(2s+1)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} s=\frac{5}{2} \Rightarrow t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2} \\ \Rightarrow 2t^2-5t+2=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2},\ t=2 \\ s=-\frac{1}{2} \Rightarrow t+\frac{1}{t}=-\frac{1}{2} \\ \Rightarrow 2t^2+t+2=0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد.} \end{cases}$$

اگر t=۲، داریم: x=۱ و اگر $t=\frac{1}{2}$، داریم: $x=-\frac{1}{2}$.

۶. در بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$، قرار می‌دهیم a=۲ و b=۱:

$$3^n=(2+1)^n=2^n+\binom{n}{1}2^{n-1}+\binom{n}{2}2^{n-2}$$
$$+\binom{n}{3}2^{n-3}+\dots+\binom{n}{n-1}\times 2+\binom{n}{n}\times 1$$
$$\Rightarrow 3^n=2^n+2^{n-1}\left[\binom{n}{1}+\frac{\binom{n}{2}}{2}+\frac{\binom{n}{3}}{2^2}+\dots+\frac{\binom{n}{n-1}}{2^{n-2}}\right]+1$$
$$\Rightarrow 3^n=2^n+A(2^{n-1})+1 \Rightarrow A=\frac{3^n-2^n-1}{2^{n-1}}.$$

پاسخ سؤالات ریاضی ۳

۱. در این سؤال داریم: $P(A)=\frac{1}{2}$، $P(B)=\frac{1}{4}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$.

پس:

الف)
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{7}{12}$$

ب)
$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

ج)
$$P(A'\cap B')=1-P(A\cup B)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

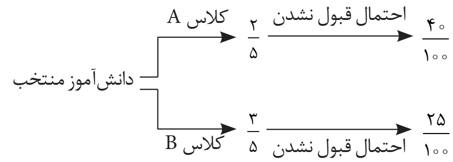
د) حداکثر یکی رخ دهد. یعنی فقط A یا فقط B رخ دهد و یا هیچ‌کدام رخ ندهد. متمم آن، این است که هر دو با هم رخ دهند، پس اگر این پیشامد C باشد، داریم:

$$P(C)=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

هـ) فقط یکی از دو پیشامد رخ دهد. یعنی فقط A و یا فقط B رخ دهد. پس اگر این پیشامد D باشد، داریم:

$$P(D)=P(A-B)+P(B-A)$$
$$=(P(A)-P(A\cap B))+(P(B)-P(A\cap B))$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

۲. فرض کنیم A پیشامد قبول نشدن دانش‌آموز انتخاب شده باشد. شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



پس:

$$P(A)=\frac{۲}{۵}\times\frac{۴۰}{۱۰۰}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۲۵}{۱۰۰}=\frac{۱۶}{۱۰۰}+\frac{۱۵}{۱۰۰}=\frac{۳۱}{۱۰۰}$$

۳. الف) اگر A پیشامد دو مهرهٔ هم‌رنگ باشد، داریم:

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}+\binom{۶}{۱}\binom{۶}{۱}}{۱۰\times۱۰}=\frac{۱۶+۳۶}{۱۰۰}=\frac{۵۲}{۱۰۰}$$

ب) اگر B پیشامد فقط یک مهرهٔ سفید باشد، این مهره سفید در انتخاب اول و یا در انتخاب دوم ظاهر می‌شود. پس:

$$P(B)=\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۶}{۱}+\binom{۶}{۱}\binom{۴}{۱}}{۱۰\times۱۰}=\frac{۲۴+۲۴}{۱۰۰}=\frac{۴۸}{۱۰۰}$$

ج) اگر C پیشامد حداقل یک مهرهٔ سیاه باشد، متمم این پیشامد این است که هر دو مهره سفید باشند.

پس:

$$P(C)=۱-\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}}{۱۰\times۱۰}=۱-\frac{۱۶}{۱۰۰}=\frac{۸۴}{۱۰۰}$$

پاسخ‌نامهٔ جبر و احتمال

۱.

$$A=n(n+۱)(n+۲)(n+۳)+۱$$
$$=(n(n+۳))((n+۱)(n+۲))+۱$$
$$=(n^۲+۳n)(n^۲+۳n+۲)+۱$$

اگر $n^۲+۳n=x$ باشد، داریم:

$$A=x(x+۲)+۱=x^۲+۲x+۱=(x+۱)^۲$$

۲. فرض کنید: $A=(k+۱)(k+۲)...(k+n)$ حاصل‌ضرب n عدد متوالی باشد که $k\in Z$. با توجه به اینکه از دو عدد متوالی، حداقل یکی مضرب ۲ است، پس A مضرب ۲ است. همچنین از هر سه عدد متوالی، حداقل یکی مضرب ۳ است، پس A مضرب ۳ است و به همین ترتیب از هر n عدد متوالی، حداقل یکی مضرب n است، پس A مضرب n نیز هست. بنابراین A مضرب ۲، ۳ و ... و n خواهد بود و چون این اعداد نسبت به هم اول‌اند، پس A مضربی از حاصل‌ضرب آن‌ها، یعنی $n!$ است.

۳. اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳ و ... و ۲n را در n دسته به‌صورت زیر طبقه‌بندی می‌کنیم:

$\{۱,۲\}\{۳,۴\},...,\{۲n-۱,۲n\}$

اکنون (n+۱) عدد انتخابی از این n مجموعه، طبق اصل لانهٔ کبوتری، حداقل دو عضو از یک مجموعه را در اختیار خواهد داشت و با توجه به اینکه داخل هر مجموعه دو عدد متوالی قرار دارند، پس نسبت به یکدیگر اول خواهند بود.

۴.

$$A=(a^۲+b^۲+c^۲)(\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲})$$
$$=\frac{a^۲}{a^۲}+\frac{a^۲}{b^۲}+\frac{a^۲}{c^۲}+\frac{b^۲}{a^۲}+\frac{b^۲}{b^۲}+\frac{b^۲}{c^۲}+\frac{c^۲}{a^۲}+\frac{c^۲}{b^۲}+\frac{c^۲}{c^۲}$$
$$=۳+(\frac{a^۲}{b^۲}+\frac{b^۲}{a^۲})+(\frac{a^۲}{c^۲}+\frac{c^۲}{a^۲})+(\frac{b^۲}{c^۲}+\frac{c^۲}{b^۲})$$

می‌دانیم که برای هر عدد حقیقی مثبت x داریم: $x+\frac{۱}{x}\geq ۲$. با توجه به اینکه دو عبارت داخل هر پرانتز معکوس یکدیگرند و مثبت، پس:

$$A\geq ۳+۲+۲+۲=۹$$

۵.

$$\frac{x^۴-y^۴}{۴y^۳}>x-y\Rightarrow x^۴-y^۴>۴y^۳(x-y)$$
$$\Rightarrow(x-y)(x^۳+x^۲y+xy^۲+y^۳)>(x-y)۴y^۳$$
$$\Rightarrow x^۳+x^۲y+xy^۲+y^۳>۴y^۳$$
$$\Rightarrow(x^۳-y^۳)+y(x^۲-y^۲)+y^۲(x-y)>۰$$

اکنون با توجه به اینکه $x>y>۰$، بنابراین تمام عبارت‌های بالا در سمت چپ نامساوی مثبت هستند و آخرین نامساوی صحیح است. پس به کمک اثبات بازگشتی حکم مسئله ثابت می‌شود.